大学物理（上）

任课教师　[曾灏宪]

中原工学院　理学院

绪　论

➢ 什么是物理学?

- 物理学是研究事物的道理的学问——格物致知，万物之理。
  - 中国古代的“物理”学，似乎是阴阳、五行、八卦、天人合一等。
- 我们现在学习的<<物理学>>，是十九世纪由西方引入的新学（西学）之一。
  - 西方的物理学,即 *Physics*。这个词早先来自希腊文 *Physis*，其原意是“自然的科学”，即在古代欧洲，物理学是自然科学的总称。
  - 随着自然科学的发展，各种独立的学科分别陆续形成，如化学、生物学、天文学、地质学及各种工程学科等。
  - 后来，物理学成为专门的、研究物质运动中最普遍、最基本的运动形式的基本规律的学科。

➢ 物理学的研究范围

- 物理学是自然科学的基础
  - 它涉及的范围，最初包括：
    - 力学
    - 热学和分子物理学
    - 电磁学
    - 光学

    称为：

    经典物理学
- 随着研究的发展，在十九世纪末，人们发现了经典物理学的局限性：
  - 在高速运动领域（速度可与光速比拟）应适用爱因斯坦建立的相对论力学；
  - 在微观领域，由原子和原子核物理，发展到量子论和量子力学。

➔物理学由 “经典物理学” 发展到 “近代物理学”

➢ 为什么要学习“大学物理”？

- 物理学研究物质世界的基本结构、基本相互作用和最普遍的运动规律。
- 周光召：研究不同层次上物质的结构、物质间相互作用和相互作用下产生的运动形态和运动规律，始终是基础科学无止境的前沿。
- 赵凯华：对于任何专业，大学基础物理课的目的，都是使学生对物理学的内容和方法，工作语言，概念和物理图象，其历史、现状和前沿等方面，从整体上有个全面的了解。这是一门培养和提高学生科学素质、科学思维方法和科学研究能力的重要基础课。

➢ 为什么要提高工科学生的物理素质？

– 根本原因：物理学与工程技术的关系，历史经验证明，社会的每一次进步都源于物理学的发展与进步。如三次工业革命。

人类科技发展史上的三次工业革命与物理学的关系：

第一次工业革命（17~18世纪）：工业的机械化——瓦特的蒸汽机

基础： 牛顿力学和波尔兹曼等创立的热力学

第二次工业革命（19世纪）：工业的电气化——发电机、电动机……

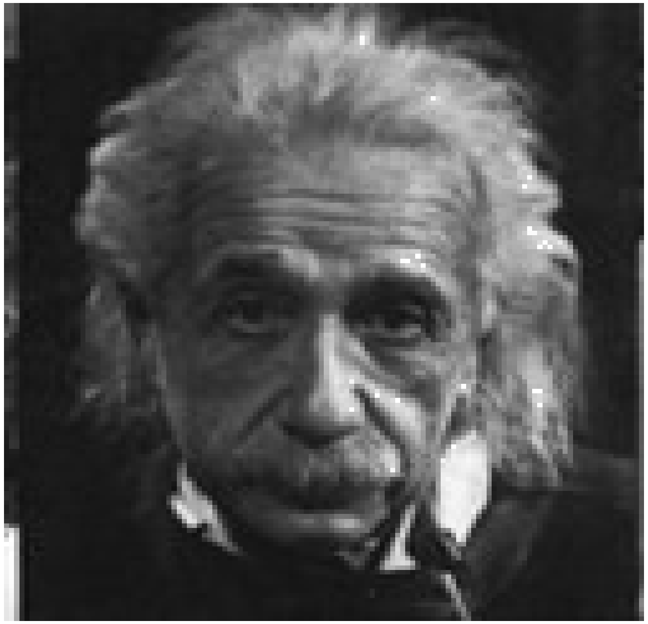
基础： 法拉第与麦克斯韦等建立的电磁学

第三次工业革命（20世纪）：工业的自动化与核能的应用——计算机、光通讯、核能等

基础： 爱因斯坦的相对论，普朗克、爱因斯坦、波尔、薛定鄂等创立的量子力学。

从根本上讲，二十世纪的技术群来源于20世纪初物理学的三大成就

1. 1905－1915年，爱因斯坦的相对论
2. 1924－1927年，量子力学
3. 原子核物理



- **由它们决定了20世纪科学技术的面貌**

第四次工业？革命：工业的______化?——纳米技术、基因工程、超导体应用……

基础： 现代物理学研究的理论与技术。

关于大学物理

- 什么是大学物理？
  - 为大学非物理专业的理工科学生开设的物理课。
- 大学物理的教学内容
  - 经典物理部分：运动学、牛顿力学、热学、电磁学、 波动光学

    ——是理工科大学生必不可少的科技基础
  - 近代物理部分：狭义相对论与量子力学基础

    ——是学习现代科学技术 不可或缺的内容
  - 现代物理部分：天体物理、粒子物理、混沌等

    ——是21世纪高技术人才应该了解的内容

大学物理与中学物理的联系与差别

- 中学物理是学习大学物理的基础；大学物理是中学物理的继承与发展，但不是简单的重复。
- 有三点主要差别：

1. 研究的对象不同：由简单到复杂，由特殊到一般。

   如：匀速→变速，恒力→变力，均匀→非均匀，质点→刚体……

2. 研究的方法和使用的工具不同：

   如：初等数学→高等数学，标量→矢量、实数→复数……

3. 研究的目的不同：

   如：只知其然→知其所以然，了解知识→应用知识。

大学物理的重要性

1. 大学物理在培养动手能力与创新精神方面的作用是任何其他学科不可替代的；
2. 大学物理的基本知识是21世纪高科技人才的知识结构中必不可少的；
3. 大学物理的基本知识是理工科大学生学好专业课与进一 步深造的基本保障。
4. 大学物理不及格是拿不到毕业证的！

怎么学？

- 要求抓好以下几个环节：
  - 1、有针对性地预习，
  - 2、认真地听讲和积极地思考，
  - 3、必要的复习，
  - 4、按时、独立地完成作业。
- 学习知识有个规律：懂 — 会 — 熟 — 巧。
- 关键是要动手动脑，勤于思考，多加练习。
- 最好把课本通读一遍！

1　质点运动学

任课教师　[曾灏宪](#)

中原工学院　理学院

大学物理（上）

1　质点运动学

1.1 质点运动的描述

一 参考系 质点

1. 参考系

- 运动是绝对的，对运动的描述是相对的。
- 运动的绝对性：所有物体都处于运动、变化之中，绝对静止的物体是不存在的。
- 描述运动的相对性：
  - 只有事先选定一个作为参考的物体，才能具体描述物体如何运动；
  - 选定的参考物体不同，对同一物体运动的描述可能有不同的结果。

1）参考系

为了描述一个物体的运动而选定的另一个作为参考的物体（～观察者），叫参考系。

任何实物物体均可被选作参考系；场（**field**）虽然是物质存在的一种形式，但场一般不用做参考系。

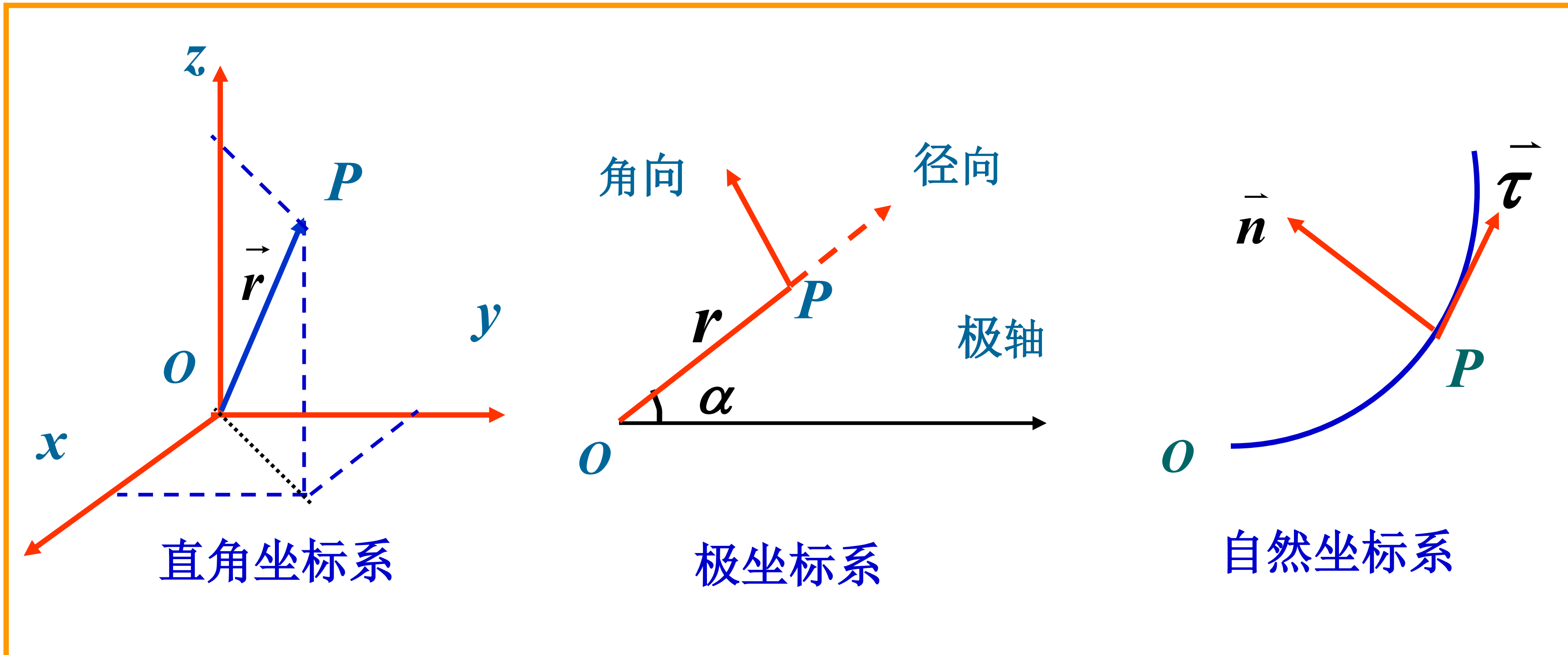
2）坐标系

为了定量的描述物体的运动，在选定的参考系上建立的带有标尺的数学坐标，简称坐标系。

坐标系是固结于参考系上的一个数学抽象。

要解决任何具体力学问题, 首先应选取一个适当的参考系, 并建立适当的坐标系, 否则就无从讨论物体的运动。

常见的坐标系： 直角坐标系，极坐标系，柱坐标系，球坐标系，自然坐标……



2. 质点

前提：

I. 可以忽略其大小和形状对物体运动的影响

II. 不涉及物体的转动和形变

- 物体能否抽象为质点，视具体情况而定.

  地——日间平均距离 r ：1.53×10^{8} km

  地球半径 R ： 6.373×10^{3} km $\ll r$

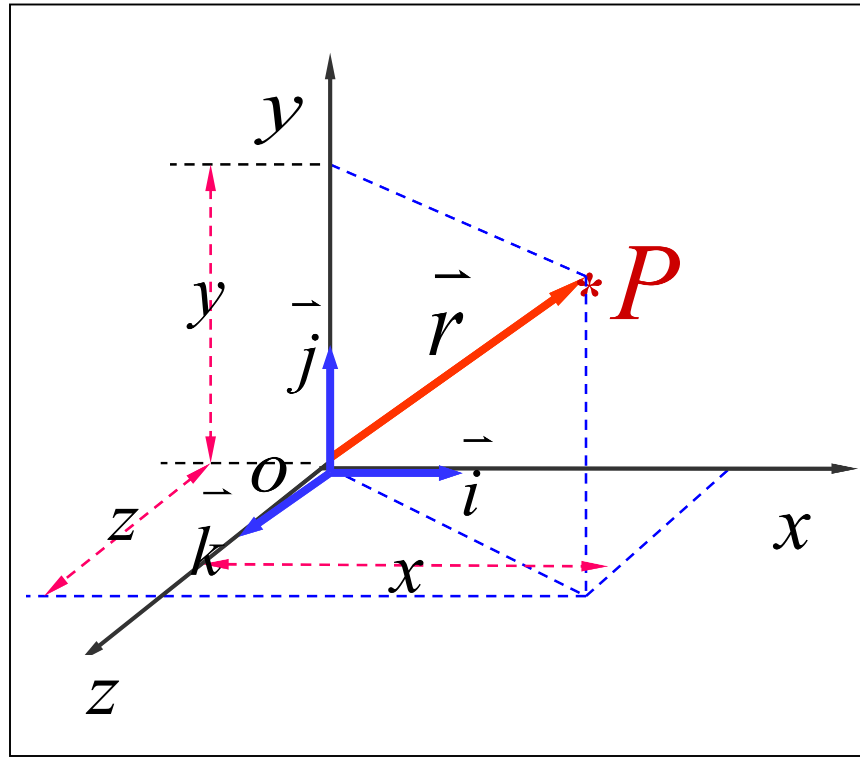
- 质点是经过科学抽象而形成的理想化的物理模型. 目的是为了突出研究对象的主要性质，暂不考虑一些次要的因素.

二　位置矢量　运动方程　位移

1. 位置矢量

简称**位矢** $\vec{r}$.

用从参考点*O*指向空间*P*点的有向线段表示.



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

式中 $\vec{i}$、$\vec{j}$ 、$\vec{k}$ 分别为x、y、z 方向的单位矢量.

位矢 $\vec{r}$ 的值为

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

位矢 $\vec{r}$ 的方向余弦

$$\begin{cases} \cos\alpha = x/r \\ \cos\beta = y/r \\ \cos\gamma = z/r \end{cases}$$

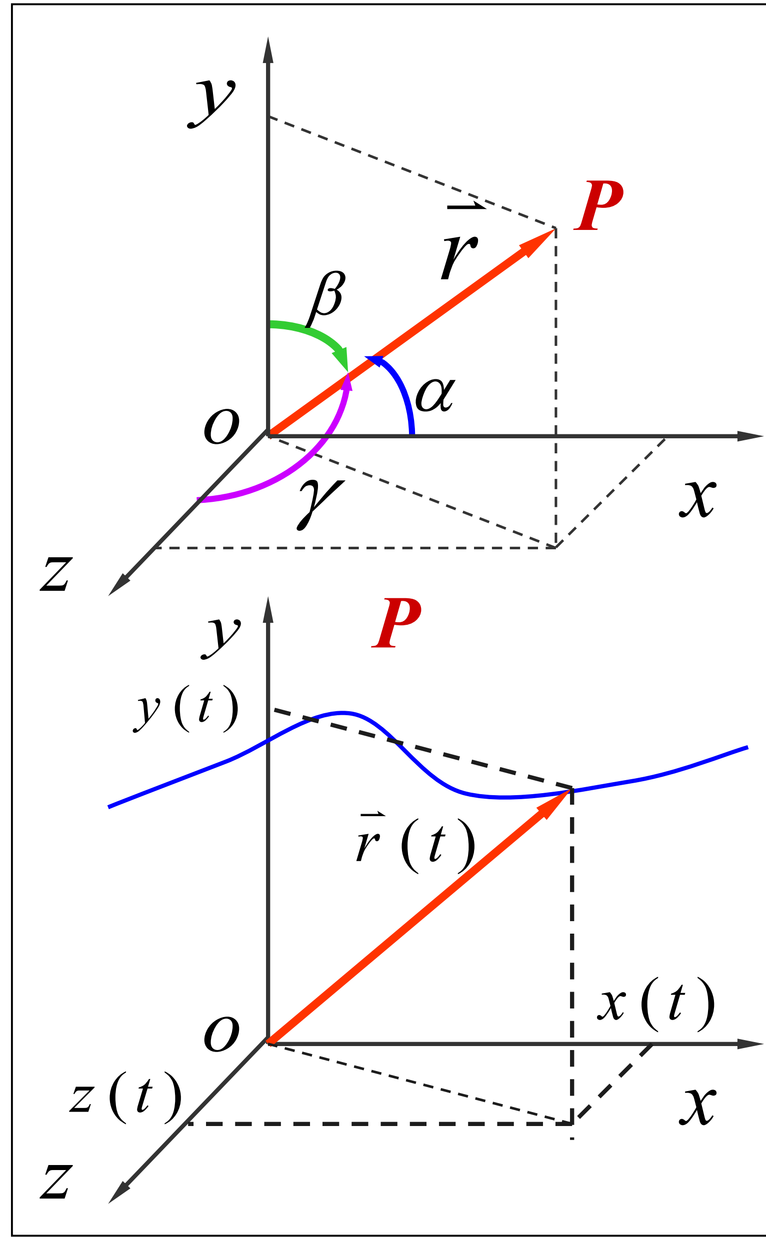
2. 运动方程 $\vec{r}$ 随时间变化的函数 $\vec{r}(t)$ 称为质点的运动方程

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

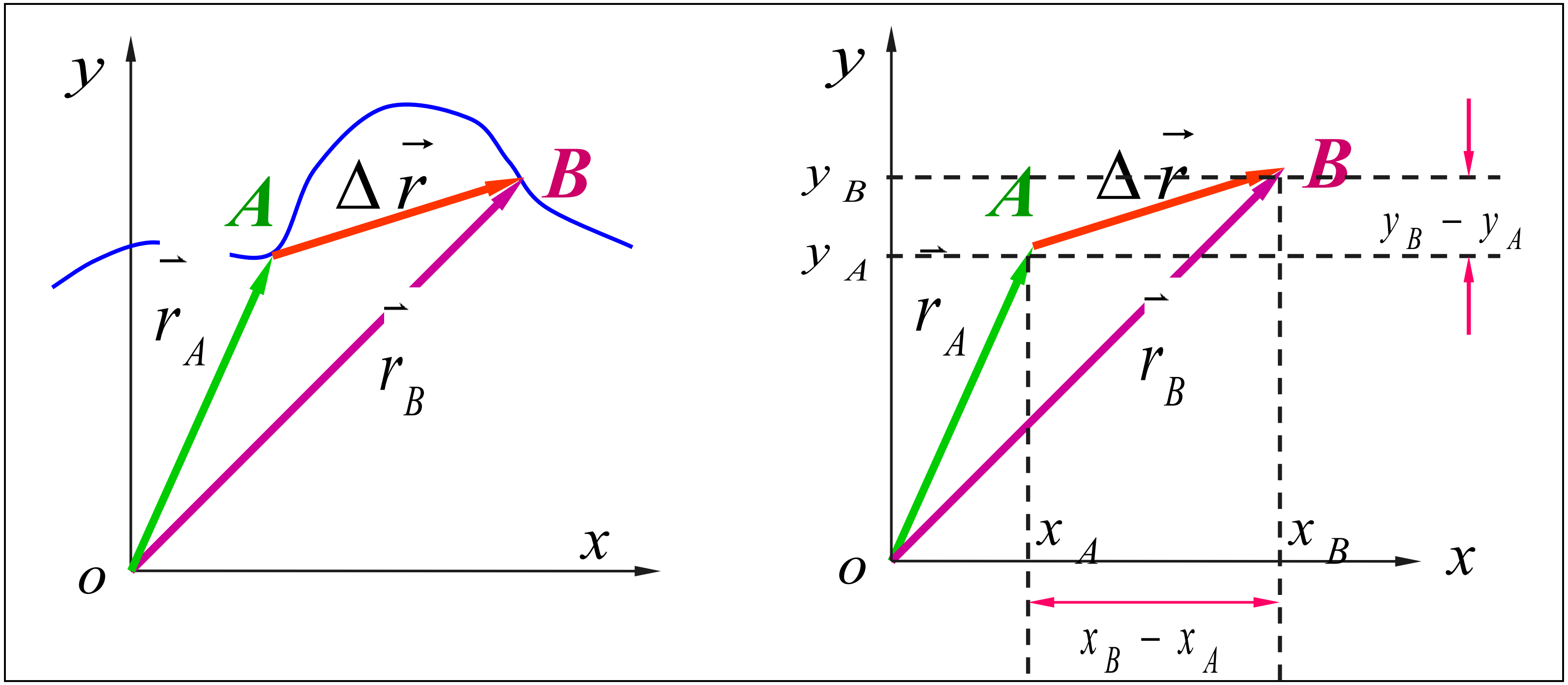
分量式 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ $= \vec{r}$

从中消去参数 t 得轨迹方程

$$f(x, y, z) = 0$$



3. 位移



经过时间间隔 Δt 后，质点位置矢量发生变化

把由始点 ***A*** 指向终点 ***B*** 的有向线段 $\Delta\vec{r}$ 称为点 ***A*** 到 ***B*** 的位移矢量，简称位移.

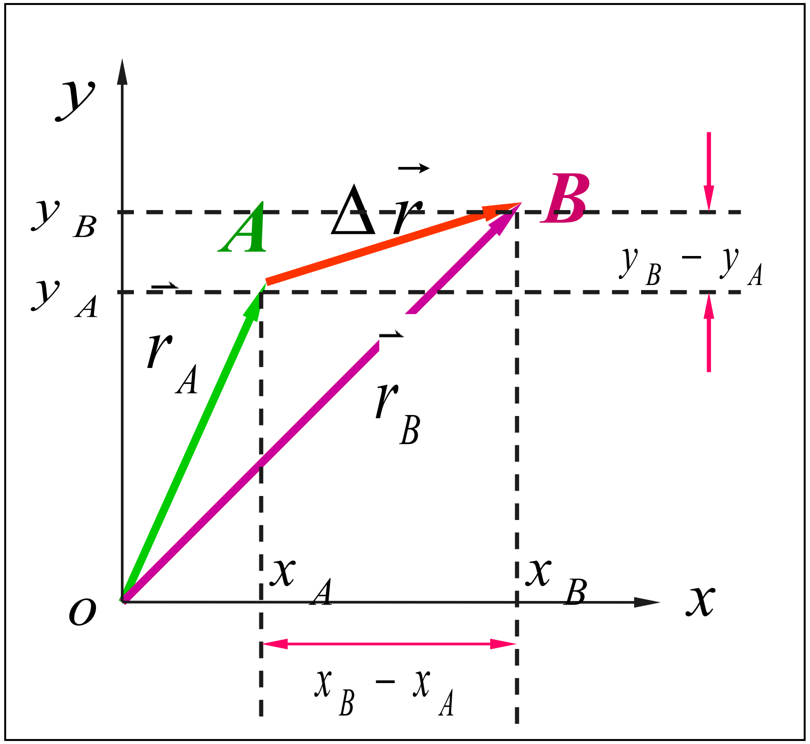
$$\boxed{\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A}$$

$$\vec{r}_A = x_A \vec{i} + y_A \vec{j}$$

$$\vec{r}_B = x_B \vec{i} + y_B \vec{j}$$

位移 $\Delta \vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$

$$= (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$$



若质点在三维空间中运动

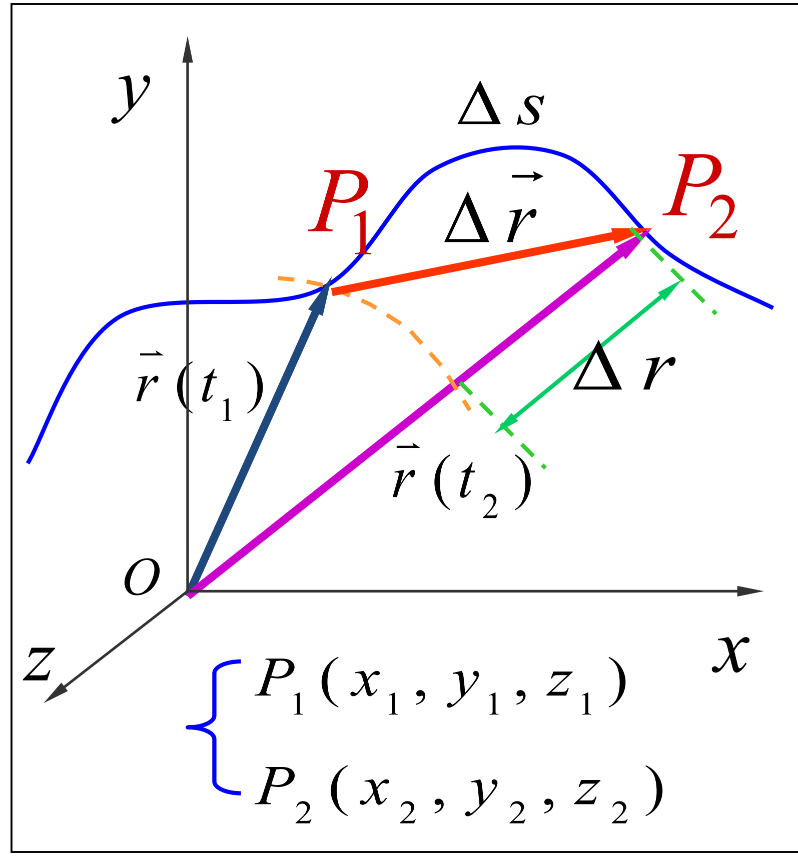
$$\Delta \vec{r} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

位移的大小为 $|\Delta \vec{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$

位移的物理意义

A）确切反映物体在空间位置的变化，与路径无关，只决定于质点的始末位置.

B）反映了运动的矢量性和叠加性.



$$\Delta \vec{r} = \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j} + \Delta z \vec{k}$$

$$|\Delta \vec{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

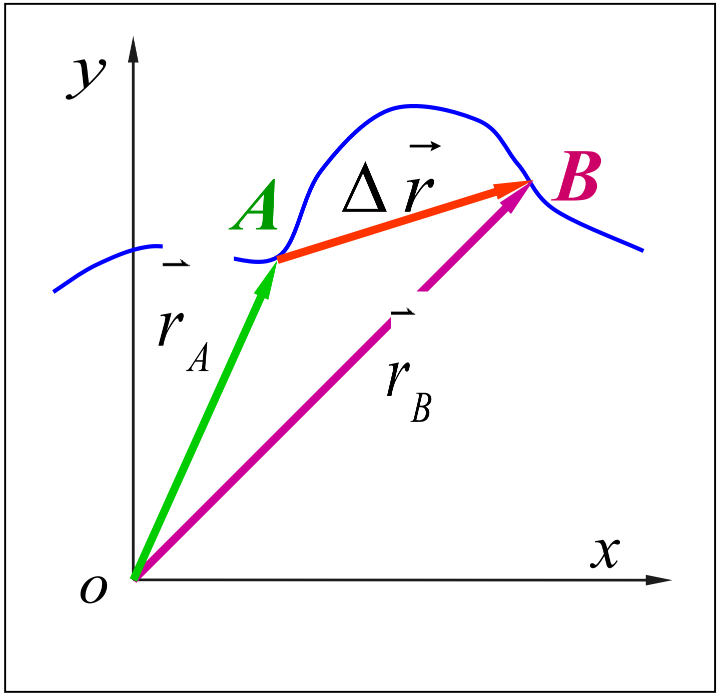
注意

$$|\Delta \vec{r}| \neq \Delta r$$

位矢长度的变化

$$\Delta r = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} - \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

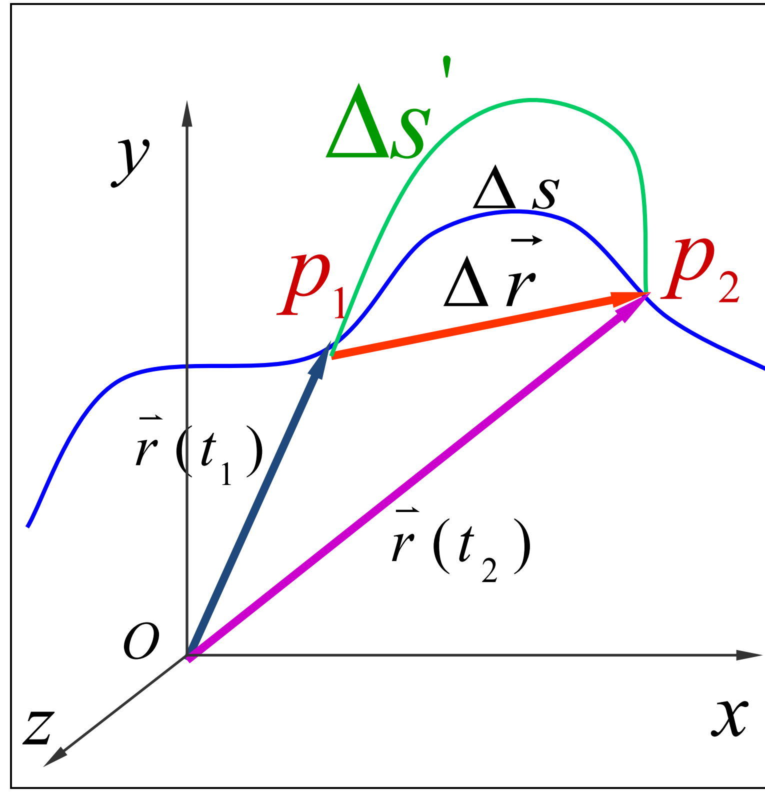
4 路程（Δs ）：质点实际运动轨迹的长度.



思考：为什么要用位矢 $\vec{r}$ 而不用路程 s 来表示运动物体的位置？

讨论：位移与路程

（**A**）P_1P_2 两点间的路程是不唯一的，可以是 Δs 或 $\Delta s'$ 而位移 $\Delta \vec{r}$ 是唯一的.



（**B**） 一般情况下，位移大小不等于路程.

$$\left|\Delta \vec{\mathrm{r}}\right| \neq \Delta s$$

（**C**）什么情况 $\left|\Delta \vec{r}\right| = \Delta s$?

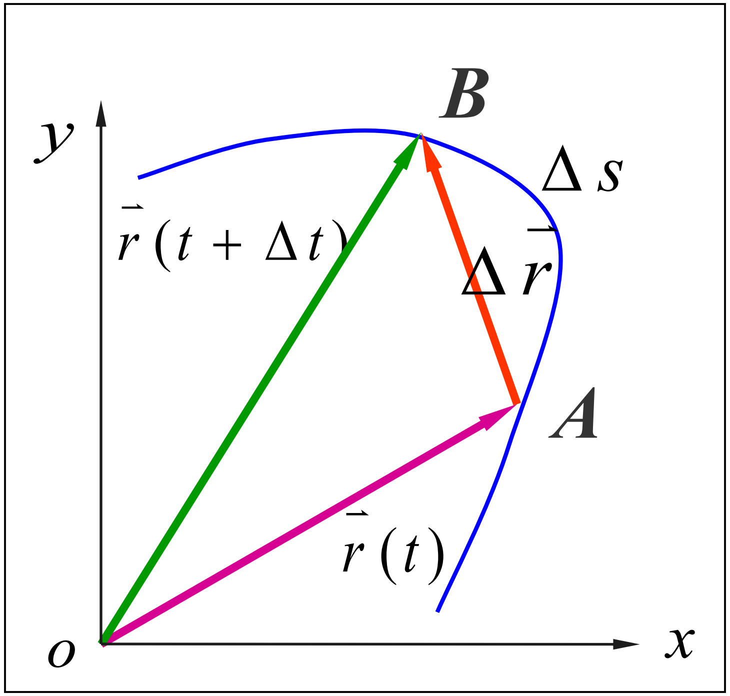
不改变方向的直线运动；当 $\Delta t \to 0$ 时 $\left|\Delta \vec{r}\right| = \Delta s$.

（**D**）位移是矢量，路程是标量.

三　速度

高中学的“速度”

Δt 时间内，质点由 $A \rightarrow B$，



平均速率 $\overline{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

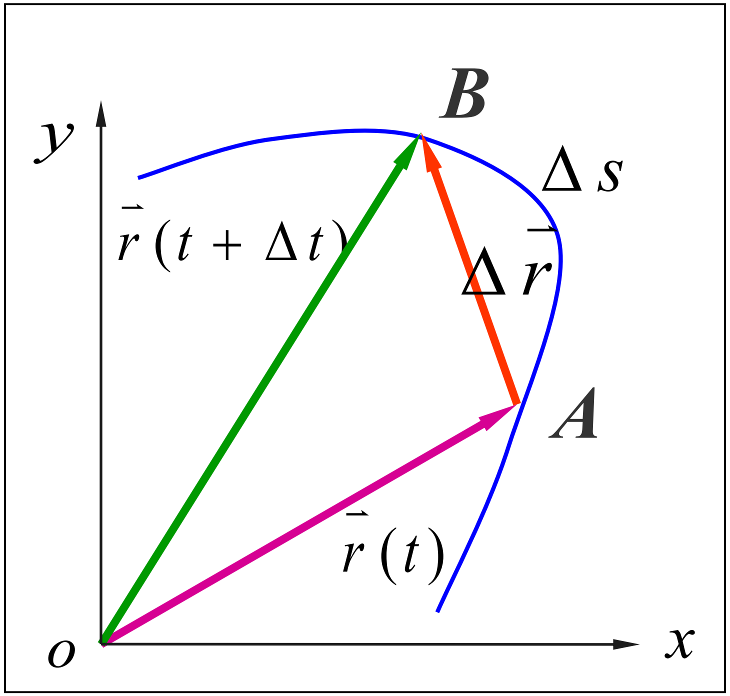
瞬时速率 $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$

局限：反映不出运动的方向（矢量）性！

1 平均速度

Δt 时间内，质点由 $A \rightarrow B$，位移

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$



平均速度

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j}$$

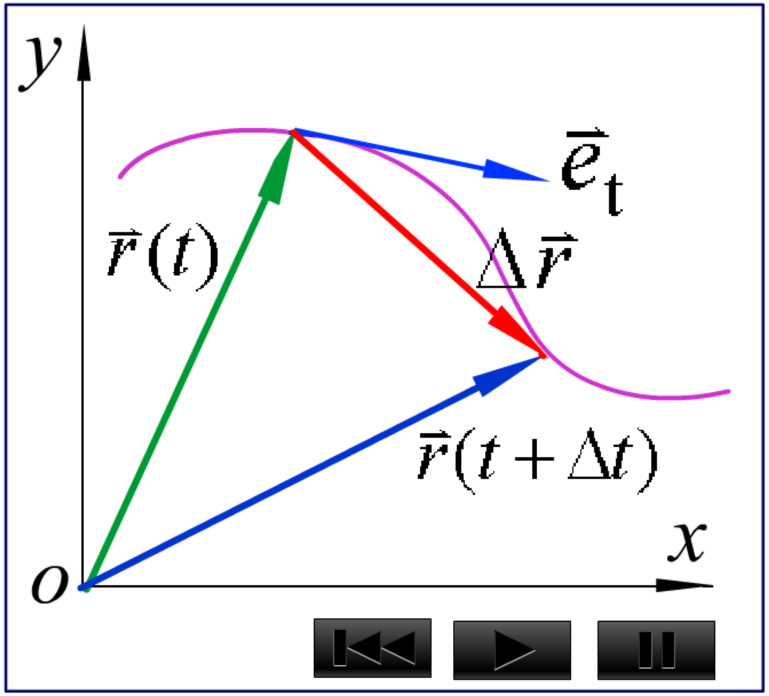
或 $\bar{\vec{v}} = \bar{v}_x\vec{i} + \bar{v}_y\vec{j}$　平均速度 $\bar{\vec{v}}$ 与 $\Delta\vec{r}$ 同方向.

平均速度大小　$$\left|\bar{\vec{v}}\right| = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$$

2 瞬时速度

当$\Delta t \to 0$时平均速度的极限值叫做瞬时速度，简称速度

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$



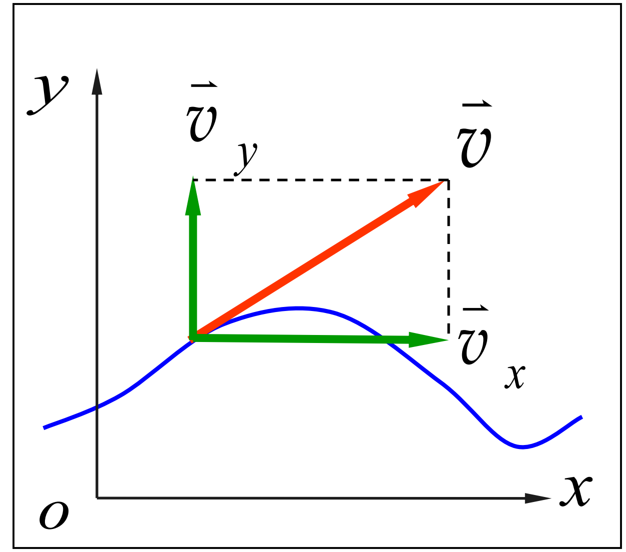
当$\Delta t \to 0$时，$\left|\mathrm{d}\vec{r}\right| = \mathrm{d}s$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{e}_t$$

当质点做曲线运动时，质点在某一点的速度方向就是沿该点曲线的切线方向．

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j}$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$$



若质点在三维空间中运动，其速度为

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

瞬时速率：速度 $\vec{v}$ 的大小称为速率

$$\because \quad \vec{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{t}}$$

$$v = \left|\vec{v}\right| = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}$$

$$\therefore \quad v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

讨论： （1）速度与速率的关系

平均速度：

$$\overline{\vec{v}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

瞬时速度

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d \vec{r}}{d t}$$

平均速率

$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

瞬时速率

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{d s}{d t}$$

区别：速度是矢量，速率是标量。

讨论： （2）平均速度的大小是否等于平均速率？

$$\left|\overline{\vec{v}}\right| = \overline{v} \quad ?$$

$$\left|\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}\right| \qquad \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$\because \quad \left|\Delta \vec{r}\right| \neq \Delta s$$

$$\therefore \quad \left|\overline{\vec{v}}\right| \neq \overline{v}$$

一般情况下，平均速度的大小不等于平均速率。

讨论： （3）速度的大小是否等于速率？

$$\left|\vec{v}\right| = v \quad ?$$

即：$\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right| = \dfrac{ds}{dt} \quad ?$

即：$\lim\limits_{\Delta t \to 0}\left|\dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}\right| = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t} \quad ?$

$$\because \lim_{\Delta t \to 0}\left|\Delta \vec{r}\right| = \lim_{\Delta t \to 0}\Delta s$$

$$\therefore \left|\vec{v}\right| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{ds}{dt} = v$$

速度的大小等于速率

一运动质点在某瞬时位于矢径 $\vec{r}(x, y)$ 的端点处，其速度大小为

（A） $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ （B） $\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$

（C） $\dfrac{\mathrm{d}|\vec{r}|}{\mathrm{d}t}$ ★（D） $\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$

例1：已知： $\vec{r} = 2t\,\vec{i} + (2 - t^2)\,\vec{j}$ (SI)

求： **2 秒末速度的大小**

解： $\vec{r} = 2t\,\vec{i} + \left(2 - t^2\right)\vec{j}$ $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = 2\,\vec{i} - 2t\,\vec{j}$

$v_x = 2$ $v_y = -2t$ $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2\sqrt{1 + t^2}$

$t = 2$ $v_2 = 2\sqrt{5} = 4.47\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

四　加速度

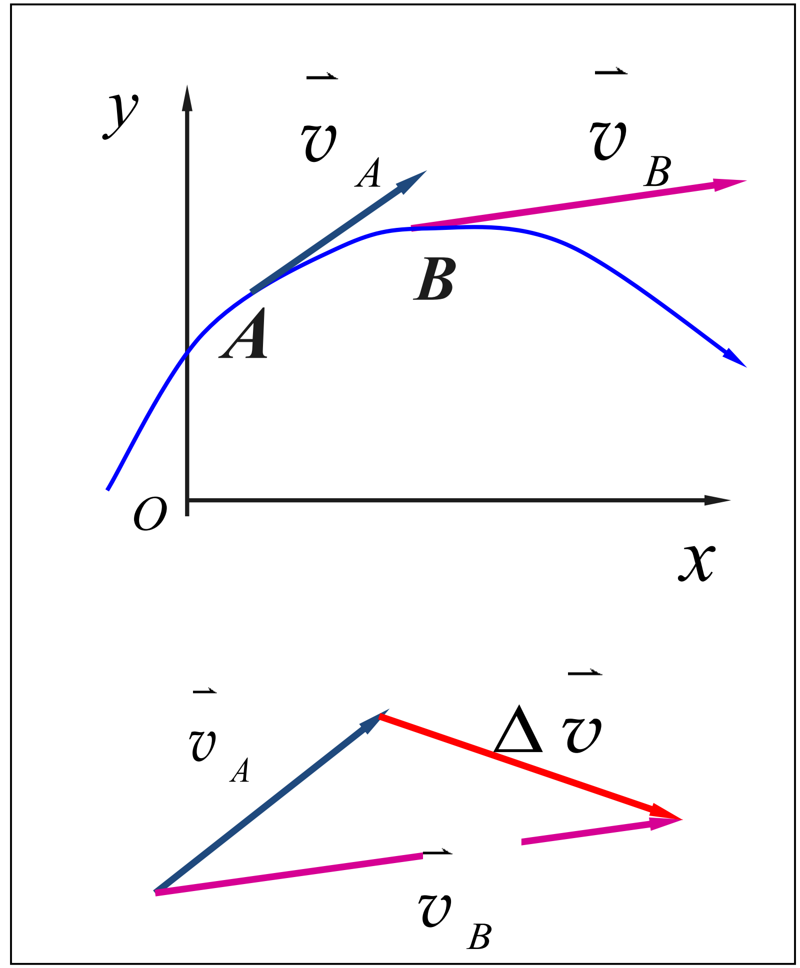
（反映速度变化快慢和方向的物理量）

1 平均加速度

单位时间内的速度增量即平均加速度

$$\vec{a}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$\vec{a}$ 与 $\Delta\vec{v}$ 同方向 .



2 （瞬时）加速度

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

瞬时加速度 —— 当Δt 趋于0时，求得平均加速度的极限，表示质点通过 A 点的瞬时加速度，简称加速度。表示为：

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

加速度等于速度对时间的一阶导数，或位移对时间的二阶导数。

加速度的方向：

当Δt 趋向零时，速度增量$\Delta \vec{v}$ 的极限方向

瞬时加速度反映了质点在任意时刻速度变化的快慢程度及变化的方向。

加速度 $\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j}$

加速度大小 $a=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\right|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$

质点作三维运动时加速度为

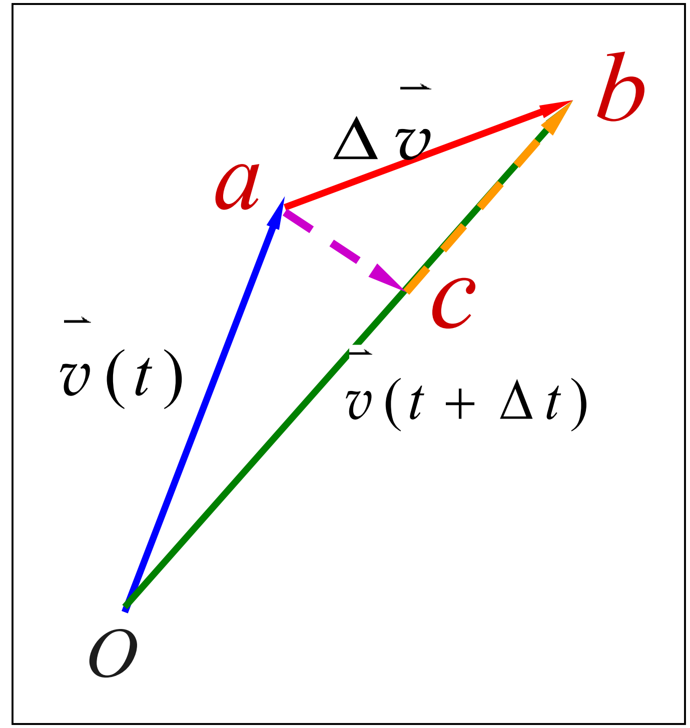
$$\vec{a}=a_x i+a_y \vec{j}+a_z k$$

$$\begin{cases} a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \\ a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} \\ a_z=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} \end{cases}$$

加速度大小

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

讨论： $\left|\Delta\vec{v}\right| \neq \Delta v$ 吗？



$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)$$

$$\left|\Delta\vec{v}\right| = \left|\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)\right|$$

在Ob上截取 $\overline{oc} = \overline{oa}$

有 $\Delta v = \overline{cb}$

$$\Delta\vec{v} = \overrightarrow{ac} + \overrightarrow{cb} = \Delta\vec{v}_{\mathrm{n}} + \Delta\vec{v}_{\mathrm{t}}$$

$$\Delta\vec{v}_{\mathrm{n}} = \overrightarrow{ac}$$ 速度方向变化

$$\Delta\vec{v}_{\mathrm{t}} = \overrightarrow{cb}$$ 速度大小变化

随堂测验：

请打开 **Canvas** 教学平台，进入课程后，在导航栏单击“测验” 以进入测试。

网址：

https://canvas.zut.edu.cn/courses/177/quizzes/871

大学物理（上）

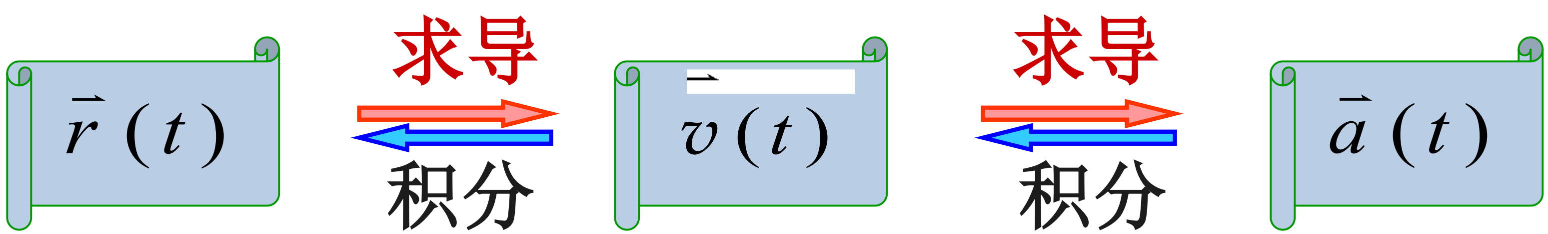
1　质点运动学

1.2　求解运动学问题举例

质点运动学两类基本问题

一　由质点的运动方程可以求得质点在任一时刻的位矢、速度和加速度；

二　已知质点的加速度以及初始速度和初始位置，可求质点速度及其运动方程．



例1 一质点沿 x 轴运动，其加速度为 $a=4t$ (SI制)，当 $t=0$ 时， 物体静止于 $x=10\text{m}$ 处. 试求质点的速度，位置与时间的关系式.

解： 由加速度和速度定义式可知，

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{dt}=4t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}v=4t\,\mathrm{d}t$$

$$\int_0^v \mathrm{d}v=\int_0^t 4t\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad v=2t^2$$

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2t^2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x=2t^2\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{10}^x \mathrm{d}x=\int_0^t 2t^2\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad x=\frac{2}{3}t^3+10$$

例2　有一质点沿 x 轴作直线运动，t 时刻的坐标为 $x = 5t^2 - 3t^3$ (SI). **试求**（**1**）在第2秒内的平均速度；（**2**）第2秒末的瞬时速度；（**3**）第2秒末的加速度.

解： (1) $\Delta x = x_2 - x_1 = -4 - 2 = -6\,\text{m}$

$$\overline{v} = \Delta x / \Delta t = -6\,\text{m/s}$$

(2) $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 10t - 9t^2$, $v\big|_{t=2} = -16\ \text{m/s}$

沿 x 方向

(3) $a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = 10 - 18t$, $a\big|_{t=2} = -26\ \text{m/s}^2$

沿 x 方向

例3 质点沿 x 轴运动，其加速度 a 与位置坐标的关系为 $a=3+6x^2$ (SI)，如果质点在原点处的速度为零，试求其在任意位置处的速度。

解： 设质点在 x 处的速度为 v

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=3+6x^2$$

$$\int_0^v v\,\mathrm{d}v=\int_0^x(3+6x^2)\mathrm{d}x$$

$$v=(6x+4x^3)^{1/2}$$

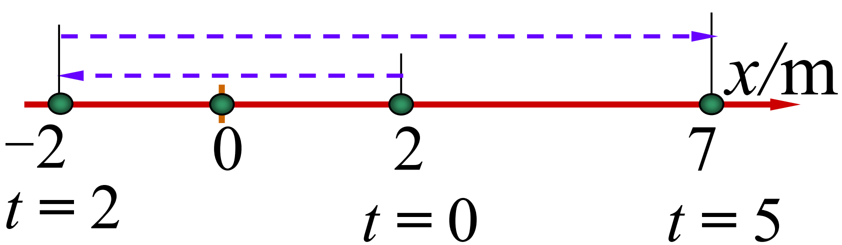
例4 一物体作直线运动，其运动方程为 $x = t^2 - 4t + 2(\mathrm{m})$ ，求 $0 \sim 5$ 秒内物体走过的路程、位移和在第5秒的速度.

解: $x = t^2 - 4t + 2(\mathrm{m})$ $\begin{cases} t = 0, & x_1 = 2\,\mathrm{m}, \\ t = 5\,\mathrm{s}, & x_2 = 7\,\mathrm{m} \end{cases}$

位移 $\Delta x = x_2 - x_1 = 5\ \mathrm{m}$

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (2t - 4)\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$ $t = 5$ 时， $v = 6\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

$t = 2\mathrm{s}$ 时, $v = 0$， $\boldsymbol{x} = -2\mathrm{m}$; $t < 2\mathrm{s}$ 时, $v < 0$.



路程 $s = (4+9)\,\mathrm{m} = 13\ \mathrm{m}$

例5　一快艇正以速度 v_0 行驶，发动机关闭后得到与速度方向相反大小与速率平方成正比的加速度．试求汽车在关闭发动机后又行驶 x 距离时的速度.

解:

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv^2$$

求 $v=v(x)$ 的关系，可作如下变换

$$a=-kv^2=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

$$-k\mathrm{d}x=\frac{1}{v}\mathrm{d}v\Rightarrow\int_0^x-k\mathrm{d}x=\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v}$$

$$v=v_0e^{-kx}$$

例 6 设质点的运动方程为 $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$，其中 $x(t)=1.0t+2.0$，$y(t)=0.25t^2+2.0$．式中各量的单位均为SI单位. **求（1）** $t=3\text{s}$ 时的速度.

（2） 求该质点的运动轨迹.

解 （1）由题意可得速度分量分别为

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}},\quad v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0.5t\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

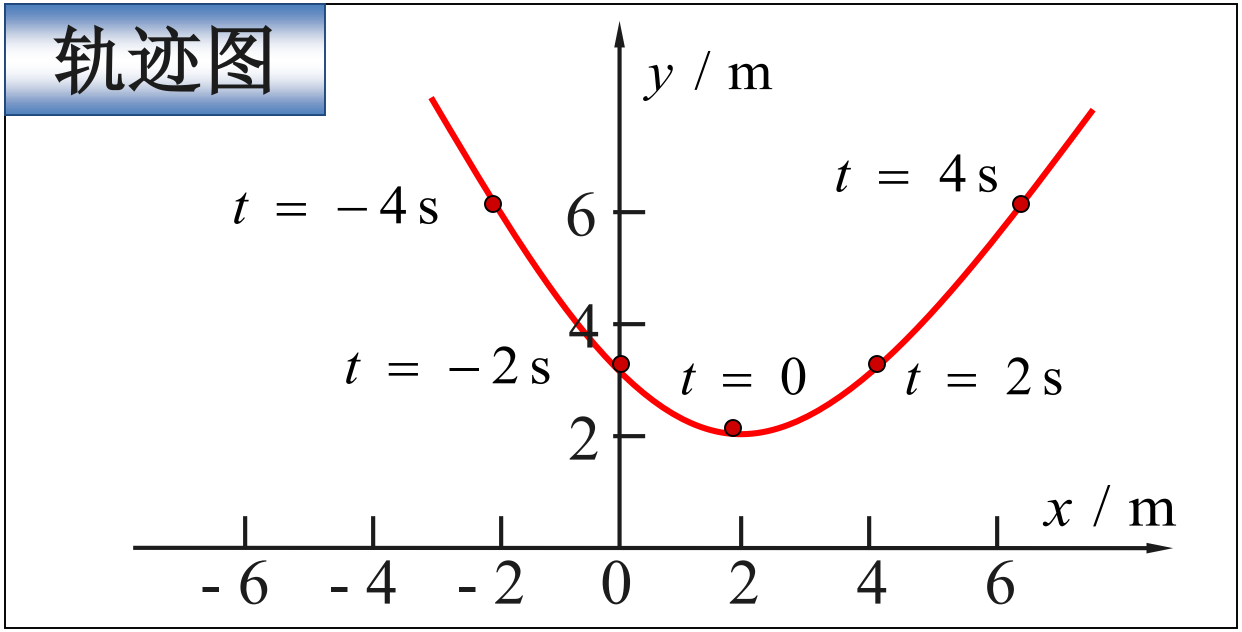
$t=3\text{s}$ 时速度为 $\vec{v}=1.0\vec{i}+1.5\vec{j}$

速度 $\vec{v}$ 与 x 轴之间的夹角 $\theta=\arctan\dfrac{1.5}{1}=56.3^\circ$

（2） 运动方程
$$\begin{cases} x(t) = 1.0t + 2.0 \\ y(t) = 0.25t^2 + 2.0 \end{cases}$$

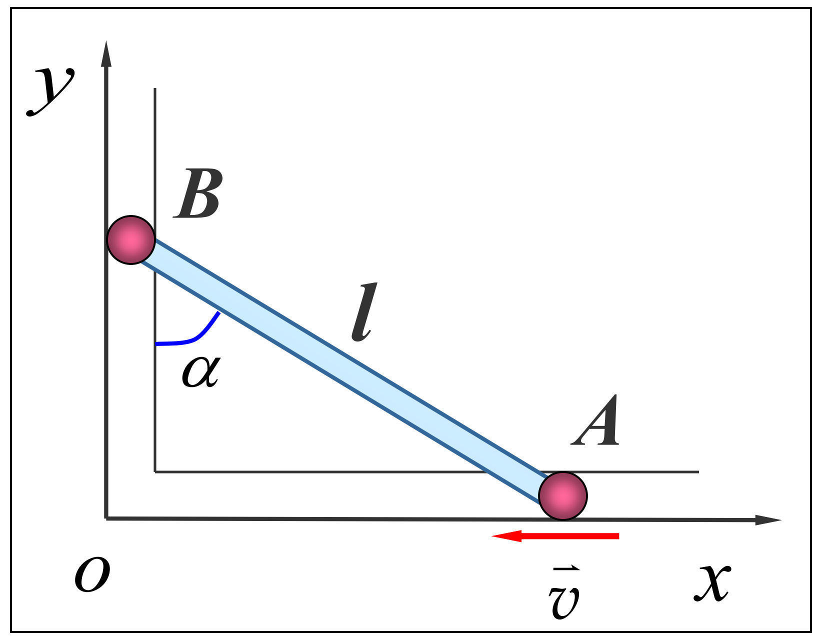
由运动方程消去参数 t 可得轨迹方程为

$$y = 0.25x^2 - x + 3 \ \text{m}$$



例7 如图所示，*A*、*B* 两物体由一长为 l 的刚性细杆相连，*A*、*B* 两物体可在光滑轨道上滑行．如物体 *A* 以恒定的速率 v 向左滑行，当 $\alpha = 60^{\circ}$ 时，物体 *B* 的速率为多少？

解 建立坐标系如图



物体*A* 的速度

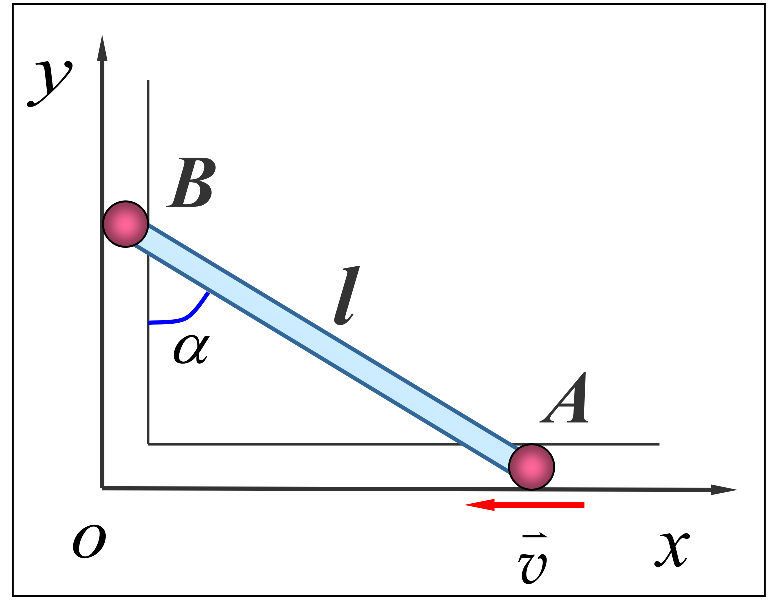
$$\vec{v}_A = v_x \vec{i} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} = -v\vec{i}$$

物体*B* 的速度

$$\vec{v}_B = v_y \vec{j} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j}$$

*OAB*为一直角三角形，刚性细杆的长度 l 为一常量

$$x^2 + y^2 = l^2$$



两边对时间求导，得

$$2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$$

即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{x}{y}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ $\quad \vec{v}_B = -\dfrac{x}{y}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{j}$

$\because \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -v, \quad \tan\alpha = \dfrac{x}{y}$ $\quad \therefore \vec{v}_B = v\tan\alpha\,\vec{j}$

$\vec{v}_B$ 沿 y 轴正向，当 $\alpha = 60^\circ$ 时 $v_B = 1.73v$

例8 已知质点的运动方程 $\vec{r} = 2t\vec{i} + (19 - 2t^2)\vec{j}$

求: (1) 轨道方程；(2) *t*=2秒时质点的位置、速度以及加速度；(3) 什么时候位矢恰好与速度矢垂直?

解: **(1)** $x = 2t \quad , \quad y = 19 - 2t^2$

消去时间参数 $y = 19 - \dfrac{1}{2}x^2$

(2) $\vec{r}\big|_{t=2} = 2\times 2\vec{i} + (19 - 2\times 2^2)\vec{j} = 4\vec{i} + 11\vec{j}$

$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = 2\vec{i} - 4t\vec{j} \qquad \vec{v}\big|_{t=2} = 2\vec{i} - 8\vec{j} \quad (\mathrm{m/s})$

$v_2 = \sqrt{2^2 + (-8)^2} = 8.25 \ \mathrm{m/s} \qquad \varphi = \arctan\dfrac{-8}{2} = -75°58'$

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=2\vec{i}-4t\vec{j} \qquad \vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=-4\vec{j}$$

$a=4\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$ 方向沿y轴的负方向

(3) $$\vec{r}\cdot\vec{v}=[2t\vec{i}+\left(19-2t^2\right)\vec{j}]\cdot\left(2\vec{i}-4t\vec{j}\right)$$

$$=4t-4t(19-2t^2)=4t(2t^2-18)$$

$$=8t(t+3)(t-3)=0$$

$t_1=0\,(s)$ ， $t_2=3\,(s)$ 两矢量垂直

作业

- 教材上所有的选择题都要自己弄懂
- **P20：7；9；11；12**

内容回顾

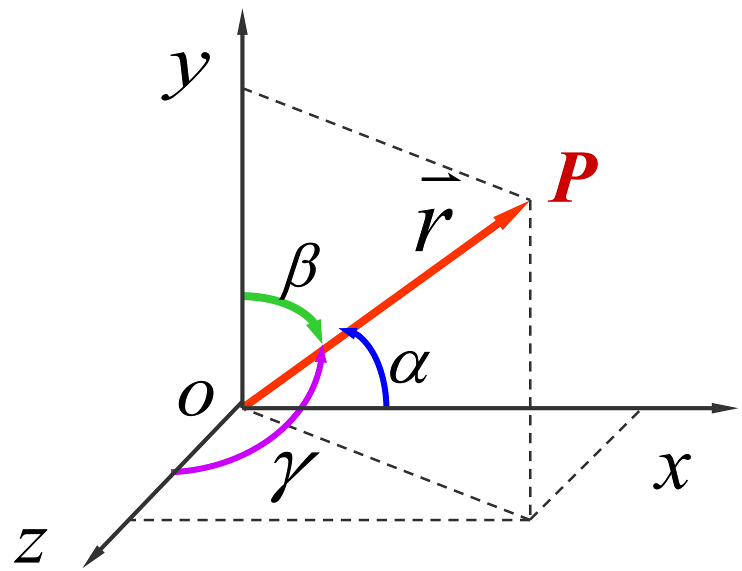
1. 参考系　坐标系　质点

2. 位置矢量　位矢的大小　方向余弦

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$r = \left|\vec{r}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\begin{cases} \cos\alpha = x/r \\ \cos\beta = y/r \\ \cos\gamma = z/r \end{cases}$$



内容回顾

3. 运动方程

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

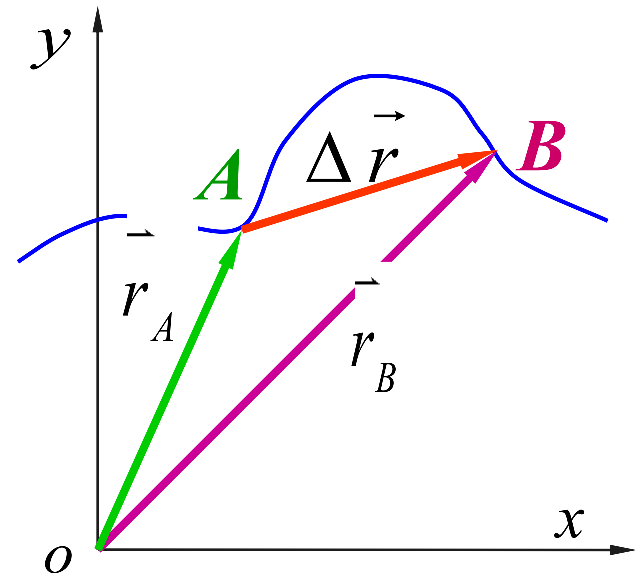
$$分量式\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

从中消去参数 t 得轨迹方程

$$f(x, y, z) = 0$$

$$\boxed{\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A}$$

内容回顾



4. 位移　位移大小　路程

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

$$\Delta\vec{r} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

位移的大小为 $|\Delta\vec{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$

路程（Δs）

内容回顾

5. 平均速度　(瞬时)速度　平均速率　(瞬时)速率

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

或 $\bar{\vec{v}} = \bar{v}_x \vec{i} + \bar{v}_y \vec{j}$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

大小 $\left|\bar{\vec{v}}\right| = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$

$$\boxed{v = \left|\vec{v}\right| = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}}$$

平均速率 $\overline{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

瞬时速率 $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$

当 $\Delta t \to 0$ 时，$\left|\mathrm{d}\vec{r}\right| = \mathrm{d}s$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{t}}$$

内容回顾

6. 平均加速度　(瞬时)加速度

$$\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad \vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

计算

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

加速度等于速度对时间的一阶导数, 或位移对时间的二阶导数。

加速度 $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j}$

加速度大小 $a = \lim_{\Delta t \to 0}\left|\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

质点作三维运动时加速度为

$$\vec{a} = a_x i + a_y \vec{j} + a_z k$$

$$\begin{cases} a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \\ a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} \\ a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} \end{cases}$$

加速度大小

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

版权声明